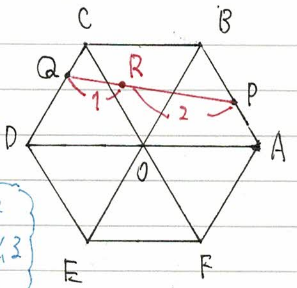
Date . . No.

2017年 東大文系数学 第2問

$0 \leqq s \leqq 1,\ 0 \leqq t \leqq 1$ として.



$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + s\overrightarrow{AB}$

$= \overrightarrow{OA} + s(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA})$

$= (1-s)\overrightarrow{OA} + s\overrightarrow{OB}$

基底のベクトルを、どの2本にすると、結果がキレイに出るか、わからないので、一旦 $\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OB}$ にしておく

$\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OD} + t\overrightarrow{DC}$ 　$\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{OB}$

$= -\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB}$

$\overrightarrow{OR} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OP} + \frac{2}{3}\overrightarrow{OQ}$

$= \frac{1}{3}\{(1-s)\overrightarrow{OA} + s\overrightarrow{OB}\} + \frac{2}{3}(-\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB})$

$= \underbrace{-\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}}_{} + s\underbrace{\left(-\frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OB}\right)}_{} + t\cdot\underbrace{\frac{2}{3}\overrightarrow{OB}}_{}$

$-\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}$ の点を始点として、 $-\frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OB}$ の方向と、 $\frac{2}{3}\overrightarrow{OB}$ の方向に 移動するベクトル

$-\frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OB} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA})$

$= \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OC}$ なので.

$\overrightarrow{OR} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + s\cdot\frac{1}{3}\overrightarrow{OC} + t\cdot\frac{2}{3}\overrightarrow{OB}$

$\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OB}$ を基底にしてきたが、$\overrightarrow{OC}$ と $\overrightarrow{OB}$ $\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{OC} と \frac{1}{3}\overrightarrow{OB}\right)$ を基底にした方がわかりやすいことに気付ける

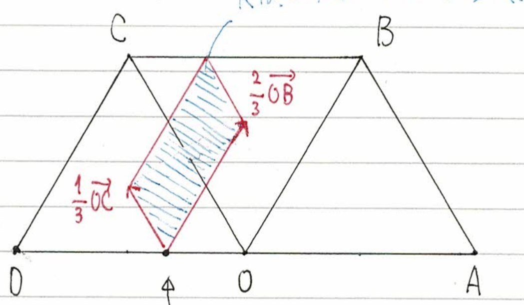
よって、$0 \leqq s \leqq 1,\ 0 \leqq t \leqq 1$ から.

Rは、$-\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}$ の位置を頂点として、

$\frac{1}{3}\overrightarrow{OC}$ と $\frac{2}{3}\overrightarrow{OB}$ で作られる平行四辺形の周及び内部

である。

Rは、この領域内を動く。



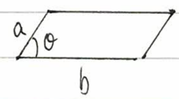
$\overrightarrow{OC}$ と $\overrightarrow{OB}$ のなす角は $60°$ なので、

求める面積は、

$\underset{|\frac{1}{3}\overrightarrow{OC}|}{\frac{1}{3}} \times \underset{|\frac{2}{3}\overrightarrow{OB}|}{\frac{2}{3}} \times \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{9}$ //

補

平行四辺形の面積は



$a \times b \times \sin\theta$

で求められる。